Chapitre 6 : Calcul matriciel
Feuille d'exercices

Exercice 1 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculez lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$A^2, AB, BA, AE, EA, ED, DE, BD, CD, A(BC)D, (-A+2E)B$$

Exercice 2 Déterminez A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et les matrices A suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 Trouvez toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant B, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Utiliser la même méthode pour calculer C^n avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculez A^n et en déduire B^n.

Exercice 6 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

   On précisera la relation liant pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
2. A partir du calcul de A^{2n}, déterminez une relation entre u_{2n}, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}.

Exercice 7 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez PS. En déduire que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = S$.
2. Calculez $D = P^{-1}AP$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculez D^n.
4. Montrez que pour tout n, on a la formule

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

5. En déduire A^n.

Exercice 8 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire A^{-1}.

Exercice 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

1. Calculez $M^2 + M - 2I_3$.
2. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

Exercice 10 On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ où l'on a : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -5x_n + 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -3x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = -9x_n + 4y_n + 4z_n \end{cases}$$

1. Calculer A^2 et A^3. A est-elle inversible ?
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (plusieurs cas). Et pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.
5. En déduire l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 11 (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit les matrices élémentaires $E_{i,j}$ comme étant les matrices nulles partout sauf l'élément de coordonnée (i, j) qui vaut 1.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour tout $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda . I_n \Leftrightarrow \forall B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA$$

Exercice 12 (*) Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B sont triangulaires supérieures.

1. Montrez que $A + B$ et AB sont également triangulaires supérieures.
2. Sans refaire les calculs, montrez que si A et B sont triangulaires inférieures, $A + B$ et AB sont également triangulaires inférieures.

Exercice 13 (*) Soit A et B deux matrices symétriques. AB est-elle nécessairement symétrique ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle le soit.

Chapitre 6 : Calcul matriciel
Feuille d'exercices

Exercice 1 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculez lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$A^2, AB, BA, AE, EA, ED, DE, BD, CD, A(BC)D, (-A+2E)B$$

Exercice 2 Déterminez A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et les matrices A suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 Trouvez toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant B, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Utiliser la même méthode pour calculer C^n avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculez A^n et en déduire B^n.

Exercice 6 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On précisera la relation liant pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

2. A partir du calcul de A^{2n}, déterminez une relation entre u_{2n}, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}.

Exercice 7 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez PS. En déduire que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = S$.
2. Calculez $D = P^{-1}AP$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculez D^n.
4. Montrez que pour tout n, on a la formule

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

5. En déduire A^n.

Exercice 8 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire A^{-1}.

Exercice 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

1. Calculez $M^2 + M - 2I_3$.
2. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

Exercice 10 On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ où l'on a : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -5x_n + 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -3x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = -9x_n + 4y_n + 4z_n \end{cases}$$

1. Calculer A^2 et A^3. A est-elle inversible ?
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (plusieurs cas). Et pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.
5. En déduire l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 11 (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on définit les matrices élémentaires $E_{i,j}$ comme étant les matrices nulles partout sauf l'élément de coordonnée (i, j) qui vaut 1.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour tout $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda . I_n \Leftrightarrow \forall B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA$$

Exercice 12 (*) Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B sont triangulaires supérieures.

1. Montrez que $A + B$ et AB sont également triangulaires supérieures.
2. Sans refaire les calculs, montrez que si A et B sont triangulaires inférieures, $A + B$ et AB sont également triangulaires inférieures.

Exercice 13 (*) Soit A et B deux matrices symétriques. AB est-elle nécessairement symétrique ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle le soit.